

实验准备知识三 常用数据处理方法

当一个实验测量的环节完成后，就要进入定量计算阶段，每次实验都会得到大量的测量数据，对于这些数据通常需要采用一些方法来处理才能得到最终的实验结果。数据处理就是从实验数据获得实验结果的过程，其中包含了数据记录、数据整理、计算、误差分析等。数据处理要运用正确的数学方法和计算工具，在保证数据原有的精度条件下得到合理的实验结果。本章节主要介绍几种基本的数据处理方法，为日后各实验中找到物体量之间正确关系提供依据。

1. 列表法

列表法就是用表格来表示实验数据和实验结果的方法，它是最常用、最简单的数据处理方法。列表法的优点是可以简单明确地表示出实验所涉及的物理量之间的关系，有助于检查测量结果是否合理，有助于找出有关量之间的联系从而建立经验公式。在使用列表法处理数据时，表格没有统一的格式要求，可根据具体实验自行设计，但是设计表格应该遵循以下几点要求：

- （1）表格的设计应简洁明了，这样有利于记录、运算和检查；
- （2）表格中的各栏目要有符号标明，数据代表的物理量和单位要交代清楚；
- （3）表格中要能体现主要仪器名称、规格和相关参数；
- （4）测量次数的安排需要按实验要求进行。

列表法表格设计举例：

表 3.1 铁盘和铜盘直径与厚度

游标卡尺：20 分度

单位：mm

序号 项目	1	2	3	4	5	平均值
铁盘直径 d_1						
铁盘厚度 h_1						
铜盘直径 d_2						
铜盘厚度 h_2						

2. 作图法

所谓作图法就是将实验中测得的各物理量采用描点的方式将几何图像表示出来,从而方便找出各物理量之间的关系。作图法的优点是直观、形象,便于比较研究实验结过并建立函数关系。作图法需要遵循以下几点要求:

- (1) 作图要在坐标纸上进行,常用的坐标纸有直角坐标纸,此外还有单对数坐标纸、双对数坐标纸、极坐标纸等;
- (2) 坐标纸的大小及坐标轴的比例,应根据所测数据的有效数字和结果的需要来确定。要适当选取横轴和纵轴的比例和坐标的分度值,使图线的间隔为 1, 2, 5, 10 等,这样便于读数 and 计算。除特殊需要外,分度值的起点不必从零点开始;
- (3) 要清楚标注坐标轴,一般自变量为横轴,因变量为纵轴,采用粗实线描出坐标轴,并用箭头表示出的方向,注明所有物理量的名称、单位和分度值;
- (4) 所有数据应先用列表法列成表格,再根据表格中的数据依次描点,数据点用标记符号“X”或“O”等进行准确标记,一张图像上有多条曲线时应该用不同的标记点体现;
- (5) 用直尺或曲线板将描好的点连接成直线或者光滑的曲线,图线不一定要通过所有的点,但应尽量保证观测点均匀分布在图线两侧,个别偏离较大的点应当舍去,原始数据应保留在图中;
- (6) 在图纸的下方或空白位置写好图名有需要标注的图中还应适当图标。

例 下面是伏安法测电阻的数据,根据数据做出伏安特性曲线

表 3.2 伏安特性测电阻数据表

U/V	0.74	1.52	3.08	3.66	4.49	5.24	5.98	6.76	7.50
I/mA	2.00	4.01	8.20	9.75	12.00	13.99	15.92	18.00	20.01

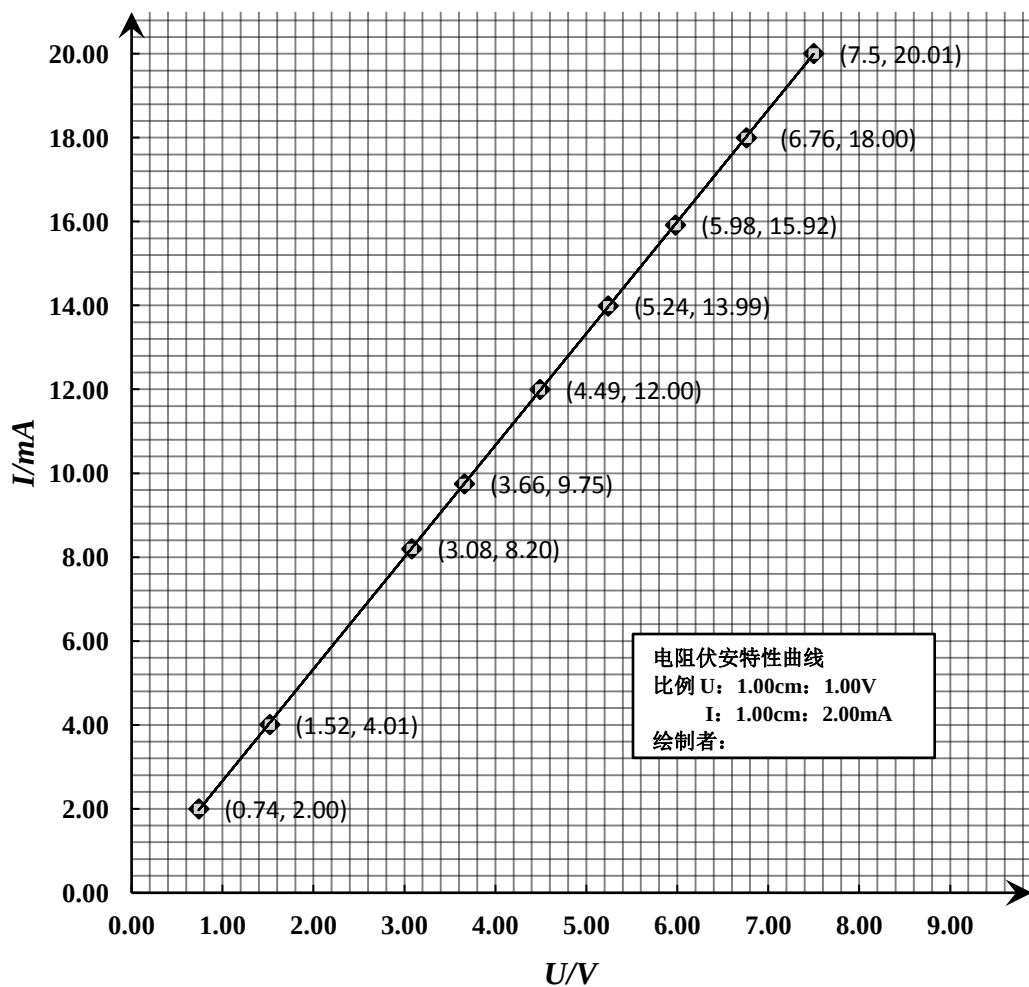


图 3.1 电阻伏安特性曲线

3. 图解法

一个实验测出数据绘制出图像并不是实验的最终目的,实验的最终目的是要由实验数据和实验曲线求得经验公式,从而反映出各物理量之间的变化规律。通过实验曲线来求得经验公式的方法就称为图解法。实验中常出现的曲线类型有:直线、抛物线、双曲线、指数函数曲线等。建立经验公式一般分为以下几个步骤:

- (1) 根据事先掌握的知识和对几何知识的了解,判断出图线的类型;
- (2) 由图线类型判定公式可能具有的特点;
- (3) 作变量代换,利用半对数、对数或倒数坐标纸尽量将原图线改变为直线;
- (4) 确定公式形式,并用实验数据检验公式的准确性。

情形一举例:直线方程的建立。

如果作出的实验曲线为直线，则可判定经验公式为直线方程：

$$y = k \cdot x + b$$

首先，确定公式中的参数 b 。找到曲线横坐标为 0 的点，这点对应的纵坐标的值即为 b ，也就是直线在纵坐标的截距，如果原实验图未给出横坐标为 0 对应的点，可以将直线用虚线延长至与纵轴相交，再量取截距。

再而，确定公式中参数 k 。要确定 k 值就是要求解直线的斜率，这时，需要在直线上任意选取两个点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)

此时斜率可以按两个点的坐标值求得：

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

注意，所选取的点一般不应为原始数据点，并且两个点的距离不能相距太近。

情形二举例：非直线方程的建立。

如果作出的实验曲线不是直线，我们需要将曲改直再利用建立直线的办法来解决问题，因为直线能够高度精确的画出图线。假设我们在研究阻尼振动的实验中绘制出了弹簧的振幅 A 与时间 t 的关系，由振动理论可以知道，弹簧振动的振幅应该随时间指数衰减：

$$A(t) = A_0 \exp(-\gamma t)$$

其中， $A(t)$ 是弹簧随时间变化的振幅值， A_0 是初始时刻弹簧的振幅， γ 是弹簧的阻尼系数。为了将曲线改直线，需要对原式子两边取对数，有：

$$\ln[A(t)] = \ln[A_0 \exp(-\gamma t)] = \ln A_0 - \gamma t$$

用单对数坐标纸作图，以时间 t 为横坐标，以 $\ln[A(t)]$ 为纵坐标，这样就得到 $\ln[A(t)] \sim t$ 关系的一条直线，再通过处理直线方程的方法就可以确定出 A_0 和 γ 的数值大小。

例 金属电阻与温度的关系可以近似表示为： $R = R_0(1 + \beta \cdot T)$ ，其中 R_0 为 $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$ 时电阻的阻值， β 为电阻的温度系数，试用图解法确定经验公式各个参量。

表 3.3 金属电阻与温度的关系测量数据表

$T/^\circ\text{C}$	10.5	26.0	38.3	51.0	62.8	75.5	85.7
R/Ω	10.423	10.892	11.201	11.586	12.025	12.344	12.679

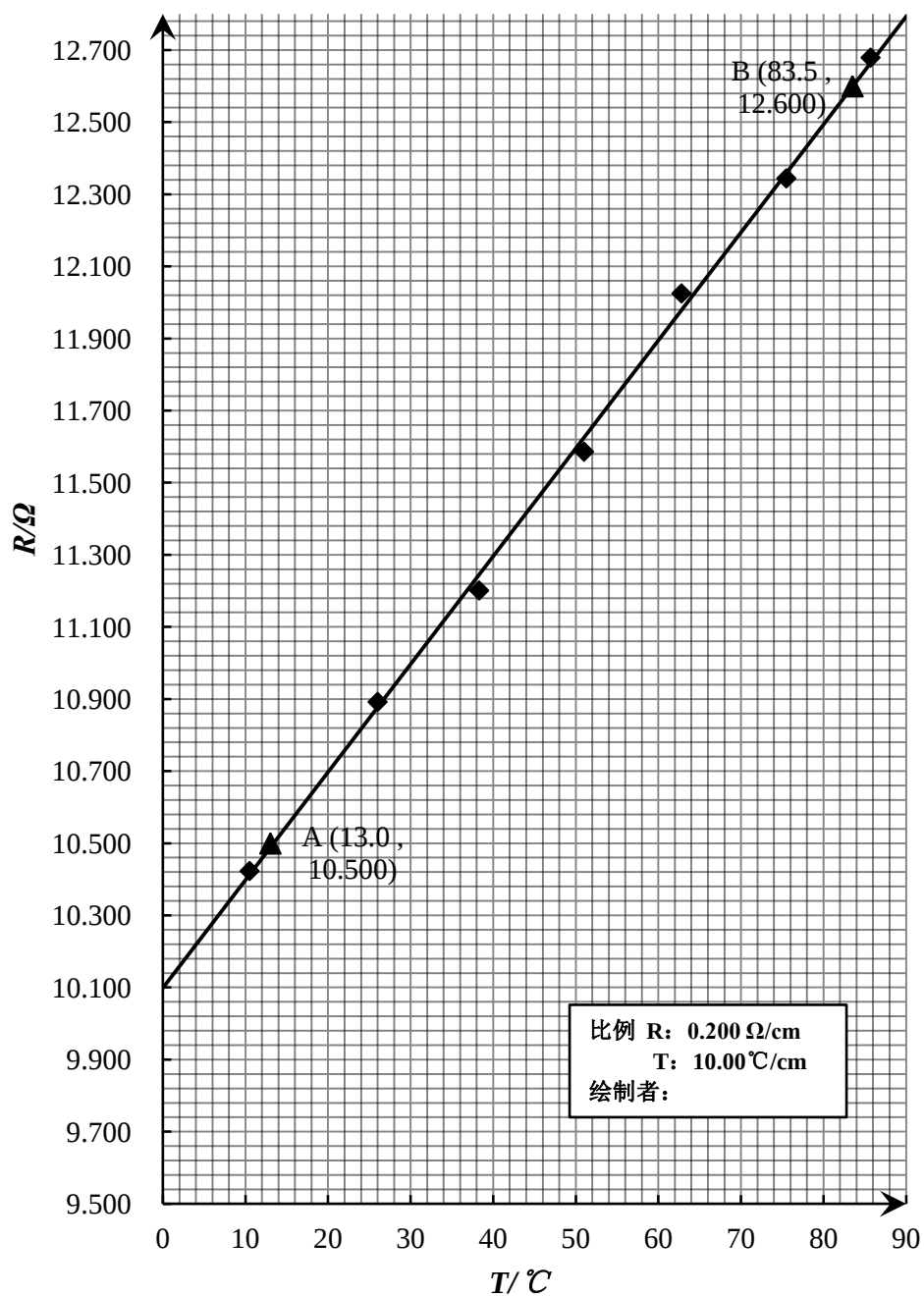


图 3.2 电阻与温度的关系曲线

由表 3.2 的数据绘制 $R \sim T$ 关系曲线如图 3.2 所示，在直线两端另外选取两个点 A (13.0,10.500)，B (83.5,12.600)，首先由两个点的坐标值确定直线的斜率 k ：

$$k = R_0 \cdot \beta = \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} = \frac{12.600 - 10.500}{83.5 - 13.0} \approx 0.0298 \text{ } \Omega/^{\circ}\text{C}$$

再根据其中一坐标点确定截距 R_0 ：

$$R_0 = R_1 - k \cdot T_1 = 10.500 - 0.0298 \times 13.0 = 10.113 \text{ } \Omega$$

$$\beta = \frac{k}{R_0} = \frac{0.0298}{10.113} \approx 0.00295/^{\circ}\text{C}$$

于是得到经验公式表达式:

$$R = 10.113 \times (1 + 0.00295 \times T) \Omega$$

4. 逐差法

在实验中,常常会遇到等间距变化的测量量,处理这样的测量量通常需要采用逐差法。逐差法就是将测量数据中具有时序的等间距变量进行分组再将对应的量逐项相减,然后把得到的差值作为变量多次测量值进行数据处理的方法。采用逐差法处理数据,可以充分利用测量数据,避免中间数据的抵消。

下面以一个最简单的线性函数 $y = k \cdot x$ (k 为常数) 来说明逐差法的基本思想:

假设我们测得的 8 数据点分别为:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \cdots (x_8, y_8)$$

首先,需要将这 8 个数据点分为两个组,第一组为: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$, 第二组为: $(x_5, y_5), (x_6, y_6), (x_7, y_7), (x_8, y_8)$ 。

再而,将两组数据点的对应数据进行逐差得到:

$$\Delta x_{1,5} = x_5 - x_1; \Delta y_{1,5} = y_5 - y_1;$$

$$\Delta x_{2,6} = x_6 - x_2; \Delta y_{2,6} = y_6 - y_2;$$

$$\Delta x_{3,7} = x_7 - x_3; \Delta y_{3,7} = y_7 - y_3;$$

$$\Delta x_{4,8} = x_8 - x_4; \Delta y_{4,8} = y_8 - y_4;$$

最后,求得增量的平均值确定 k 的值:

$$\overline{\Delta x} = (\Delta x_{1,5} + \Delta x_{2,6} + \Delta x_{3,7} + \Delta x_{4,8})/4$$

$$\overline{\Delta y} = (\Delta y_{1,5} + \Delta y_{2,6} + \Delta y_{3,7} + \Delta y_{4,8})/4$$

$$k = \frac{\overline{\Delta y}}{\overline{\Delta x}}$$

例 测量弹簧劲度系数时,得到伸长量与所加砝码的数据如下,请利用逐差法处理数据得到劲度系数 k 。

序数 项目	1	2	3	4	5	6	7	8
砝码 m/g	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	35.0
伸长量 l/cm	0.00	1.15	2.30	3.46	4.64	5.76	6.92	8.07

解：采用分组逐差法，将数据分成高组（ l_5, l_6, l_7, l_8 ）和低组（ l_1, l_2, l_3, l_4 ）两组，将两组进行逐差得到：

$$\Delta l_1 = l_5 - l_1 = 4.64 - 0.00 = 4.64 \text{ cm}$$

$$\Delta l_2 = l_6 - l_2 = 5.76 - 1.15 = 4.61 \text{ cm}$$

$$\Delta l_3 = l_7 - l_3 = 6.92 - 2.30 = 4.62 \text{ cm}$$

$$\Delta l_4 = l_8 - l_4 = 8.07 - 3.46 = 4.61 \text{ cm}$$

$$\overline{\Delta l} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4}{4} = \frac{4.64 + 4.61 + 4.62 + 4.61}{4} = 4.62 \text{ cm}$$

$$\overline{\Delta m} = 20 \text{ g}$$

$$k = \frac{\overline{\Delta m} \cdot g}{\overline{\Delta l}} = \frac{20 \times 10^{-3} \times 9.8}{4.62 \times 10^{-2}} = 4.24 \text{ N/m}$$

5. 最小二乘法

用图解法求经验公式方法简单、直观但是随意性强精度不高，因此，图解法所得到的线性拟合不是最佳的。由一组实验数据找出一条最佳的拟合曲线通常需要采用最小二乘法，这是解方程回归问题最常用的数学方法。

下面以一最简单的情况来了解怎样用最小二乘法确定参数。

设已知函数形式为： $y = k \cdot x + b$ （ k 和 b 均为常数）

这是一个一元线性回归方程，由实验测得的数据点为：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \cdots (x_n, y_n)$$

由最小二乘法，应该使表达式：

$$Q = \sum_{i=1}^n [y_i - (k \cdot x_i + b)]^2 = \text{最小值}$$

由微分学可知， Q 要取极小值， Q 对 k 和 b 的偏导数要为 0，即：

$$\partial Q / \partial a = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (k \cdot x_i + b)] = 0$$

$$\partial Q / \partial b = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (k \cdot x_i + b)] \cdot x_i = 0$$

由上式可得含待定参数 k 和 b 的方程组：

$$\bar{y} - b - k \cdot \bar{x} = 0$$

$$\overline{xy} - b \cdot \bar{x} - k \cdot \overline{x^2} = 0$$

式中， $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分别表示 x 和 y 的平均值， $\overline{x^2}$ 表示 x^2 的平均值， $\overline{xy}$ 表示 xy 的平均值即

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i。$$

解此联力方程组即可得到参数：

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

练习题

1. 以下是用伏安法测量线性电阻的数据，分别用图解法和分组逐差法求电阻阻值。

U/V	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
I/mA	39	77	116	155	194	231	271	310

2. 阻尼振动实验中，测得每隔 $T/2$ ($T = 3.11\text{ s}$) 振幅 A 的数据如下，由振动理论知存在阻尼情况下，振动振幅作指数衰减可表示为： $A = A_0 e^{-\gamma t}$ ，试用图解法确定经验公式中的未知系数。

t/s	0	$T/2$	T	$3T/2$	$2T$	$5T/2$
$A/\text{格}$	60.0	31.0	15.2	8.0	4.2	2.2